

На правах рукописи

ЛУКАШЕВИЧ
Анатолий Анатольевич

**РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ
СВЯЗЯМИ МЕТОДОМ ПОШАГОВОГО АНАЛИЗА**

05.23.17 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Томск – 2011

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ
Розин Леонид Александрович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор,
Люкшин Борис Александрович

доктор технических наук, профессор,
Максименко Андрей Алексеевич

доктор технических наук, профессор,
Харлаб Вячеслав Данилович

Ведущая организация: **ОАО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева»,**
г. Санкт-Петербург

Защита диссертации состоится « 21 » октября 2011 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.265.01 в Томском государственном архитектурно-строительном университете по адресу: 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, корпус 5, ауд. 307, тел./факс (3822) 659952.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного архитектурно-строительного университета.

Автореферат разослан «12» сентября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Н. О. Копаница

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Конструктивно нелинейные задачи с односторонними связями и трением при неизвестной заранее зоне контакта часто встречаются при расчете различного рода конструкций и сооружений. Например, технологические и деформационные швы, имеющие место в массивных сооружениях, могут раскрываться и закрываться, как с проскальзыванием, так и со сцеплением контактирующих поверхностей, при различных сочетаниях внешних нагрузок. Такие же эффекты могут происходить на контакте подошвы сооружения с основанием, либо на отдельных опорах, допускающих отрыв и скольжение находящейся на них конструкции. В то же время именно состояние приконтактной зоны нередко является определяющим при оценке напряженно-деформированного состояния, прочности и работоспособности конструкций и сооружений.

Особый интерес представляют задачи с усложненными условиями контакта, учет которых приближает расчетную схему к реальным условиям работы сооружения. Это, например, контактное трение при зависящих от решения нормальных силах взаимодействия на контакте, учет деформаций и начальной прочности односторонних связей, учет последовательности возведения и загрузки сооружения и т. п. В этих случаях контактная задача усложняется в математическом отношении и усложняется ее численное решение. Поскольку учет перечисленных выше условий делает решение подобных задач зависящим от характера и истории загрузки, представляется целесообразным моделировать процесс нагружения и, соответственно, строить решение на основе пошагового анализа.

Несмотря на большое количество работ, относящихся к решению задач с односторонними связями, остается еще много различных вопросов, требующих дальнейших исследований. Настоящая диссертация посвящена рассмотрению ряда подобных проблем, многие из которых удастся решить путем построения соответствующих расчетных моделей, разработке эффективных методов и алгоритмов их расчета.

Цель работы состоит в следующем:

- построение расчетных моделей контактного взаимодействия упругих систем на основе контактных конечных элементов (ККЭ), получение матриц жесткости рамных контактных элементов, взаимодействующих с обычными конечными элементами двумерных и трехмерных задач;
- развитие метода пошагового анализа, приводящего к построению оптимального (по продолжительности, трудоемкости и точности) процесса

решения односторонних контактных задач на статические и динамические воздействия;

- применение предложенных моделей и методов их расчета к решению задач с учетом трения на контакте, физических свойств односторонних связей и других важных факторов;
- использование разработанных моделей и методов для расчета конструкций и сооружений с односторонними связями.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- предложена рамно-стержневая модель контактного взаимодействия упругих систем с использованием контактных конечных элементов в виде стержневой системы – плоской или пространственной рамы;
- получены в явном виде матрицы жесткости для рамно-стержневых контактных элементов, совместимых с обычными конечными элементами двумерных (трехмерных) задач и моделирующих односторонние связи при наличии трения, а также физические свойства односторонних связей;
- разработаны эффективные схемы учета трения в односторонних связях, как при заданных, так и зависящих от решения нормальных силах взаимодействия, основанные на пошаговом анализе процесса нагружения и изменения состояния контакта рассматриваемой системы; шаги нагружения в пошаговом анализе назначаются в зависимости от характера изменения сил взаимодействия на контакте, что позволяет уточнять величину не только текущего шага, но и прогнозировать последующие шаги и, таким образом, строить оптимальный, с точки зрения продолжительности и трудоемкости, процесс нагружения;
- с использованием ККЭ и пошагового анализа построены расчетные модели и предложены способы учета усложненных условий контакта в виде упругой податливости, начальной прочности, нелинейных деформаций в односторонних связях, разработана методика и алгоритм учета последовательного возведения и загрузки сооружения;
- на базе предложенных моделей и метода пошагового анализа разработан численный подход, реализованный в виде алгоритмов и вычислительных программ для решения односторонних контактных задач, как на статические, так и на динамические нагрузки.

Методы исследований. На основе предложенных моделей и схем контактного взаимодействия в форме ККЭ контактные задачи с односторонними связями и трением решаются при помощи пошагового анализа. При этом для статических задач имеет место пошаговый процесс нагружения; для динамических задач – пошаговое интегрирование по времени. Для дискретизации задачи, включая условия на контакте, используется

общая идея метода конечных элементов (МКЭ). Расчеты выполняются с помощью разработанных алгоритмов и соответствующих вычислительных программ, зарегистрированных в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации (свидетельства о государственной регистрации №№ 2005610090, 2005610573, 2008610113).

Достоверность полученных результатов обусловлена корректным использованием разработанных моделей и предложенных схем пошагового их анализа; подтверждается оценкой внутренней сходимости численных алгоритмов и анализом результатов расчетов с точки зрения их физической достоверности. Кроме того, там где это возможно, выполняется сопоставление полученных решений с известными решениями, в том числе с результатами, полученными с помощью других численных методов.

Практическая значимость. Полученные в работе научные результаты, разработанные расчетные модели и схемы, а также алгоритмы и вычислительные программы могут быть использованы для статических и динамических расчетов упругих систем с различного вида односторонними связями. Практический интерес представляют модели и численная реализация усложненных условий контакта и ряда других дополнительных факторов. В их числе – учет трения при заданных на контакте нормальных силах взаимодействия, физических свойств и начальной прочности контактного слоя, последовательного возведения сооружения и т. п., рассмотрение которых приближает расчетную схему к реальным условиям работы сооружения. Проведены численные исследования ряда гидротехнических сооружений и конструкций с односторонними связями при различных видах контакта с основанием, характера возведения объекта и приложения внешних нагрузок. На основе анализа полученных результатов сделаны предложения, касающиеся конструктивных решений сооружений и действующих на них нагрузок.

На защиту выносятся:

- равно-стержневая модель контактного взаимодействия упругих систем с использованием контактных элементов в виде плоской или пространственной рамы, моделирующих односторонние связи с трением, а также физические свойства контактного слоя;
- построение ряда равно-стержневых контактных конечных элементов, взаимодействующих с обычными конечными элементами двумерных и трехмерных задач;
- численная реализация метода пошагового анализа для решения односторонних контактных задач с использованием предложенной расчетной

модели контакта;

- численные схемы учета трения при изменяющихся в процессе нагружения нормальных силах взаимодействия с использованием кусочно-линейной аппроксимации предельных сил трения на контакте;
- алгоритмы решения динамической контактной задачи без учета и с учетом трения, основанные на пошаговом (по времени) анализе состояния контакта;
- расчетные модели и методики учета физических свойств односторонних связей;
- программная реализация и результаты численных исследований разработанных моделей и методов их расчета для различных условий контакта;
- результаты расчетов конструкций и сооружений с односторонними связями.

Апробация работы. Основные положения и результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались на региональной научно-практической конференции «Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса» (Хабаровск, 2007 г.); на VII и VIII международных научно-технических конференциях ИАС ТОГУ «Новые идеи нового века» (Хабаровск, 2007, 2008 гг.); на XXII и XXIII международных конференциях "Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов" (Санкт-Петербург, 2007, 2009 гг.); на международной конференции "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения" (Санкт-Петербург, 2008 г.); на научно-технических семинарах кафедр «Строительная механика и теория упругости», «Строительные конструкции и материалы» СПбГПУ (Санкт-Петербург, 2008-2010 гг.). Опубликовано научные статьи в сборниках трудов указанных конференций и семинаров.

Публикации. Основные положения диссертации изложены в 27 печатных работах, включая 9 статей в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для докторских диссертаций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы из 230 наименований. Работа изложена на 283 страницах, содержит 111 рисунков и 28 таблиц.

Автор выражает искреннюю признательность заслуженному деятелю науки и техники РФ, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Розину за постоянное внимание к работе, ценные советы и консультации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор состояния проблемы, формулируются цели и методы исследования. Кратко изложено содержание диссертации по главам.

Обзор состояния проблемы. Задачи определения контактного взаимодействия между деформируемыми телами или частями одного тела с неизвестной заранее зоной контакта имеют широкую область приложений в строительстве, машиностроении и других областях инженерной деятельности. Связи, действующие между контактирующими поверхностями взаимодействующих тел, принято называть односторонними (работающими в одну сторону). Односторонние связи разделяются на два основных класса – идеальные (без учета трения и других усложняющих факторов) и неидеальные связи (при наличии трения, начальной прочности и др.). Свойства систем с неидеальными односторонними связями значительно сложнее, чем с идеальными. При моделировании односторонних связей условия, налагаемые на перемещения и усилия в зоне контакта, представляются в виде неравенств. Особенностью такого рода задач является то, что с изменением состояния контакта в процессе нагружения резко меняются жесткостные свойства системы, т. е. эти задачи являются конструктивно нелинейными. В то же время конфигурация зон контакта или отрыва (а при учете трения также и участков проскальзывания-сцепления) заранее неизвестна и может быть определена только в процессе решения задачи.

Основы для современных исследований задач с односторонними связями заложены в работах В. М. Александрова, И. И. Воровича, П. Вригерса, Л. А. Галина, Я. Гаслингера, Р. Гловински, Р. В. Гольдштейна, К. Джонсона, Г. Дюво, Н. Кикучи, Т. А. Ларсена, Ж.-Л. Лионса, Дж. Одена, П. Панагиотопулоса, А. Синьорини, А. А. Спектора, Р. Тремольера, Г. Фикера, И. Я. Штаермана и других ученых.

Численное решение конструктивно нелинейных контактных задач осуществляется, как правило, на основе различных схем метода конечных элементов. При этом континуальные задачи контакта упругих тел сводятся к конечномерным задачам с дискретными односторонними связями. Разработке различных численных методов расчета систем с односторонними связями на базе МКЭ посвящено большое число исследований, среди которых отметим работы А. В. Вовкушевского, П. Вригерса, Р. Галлагера, В. Н. Гордеева, Р. Гудмена, О. Зенкевича, Н. Кикучи, А. С. Кравчука, Т. А. Ларсена, Дж. Одена, А. В. Перельмутера,

Л. А. Розина, Н. Н. Шапошникова, Б. А. Шойхета и многих других.

Для моделирования односторонних связей могут применяться специальные контактные конечные элементы (ККЭ). ККЭ вводятся на участках возможного контакта взаимодействующих тел, тем самым дискретизируя некоторый тонкий слой – фиктивный или имеющий место в реальных условиях между контактирующими поверхностями (зазоры, микронеровности, шероховатости и т. п.). Этот контактный слой объединяет взаимодействующие тела в единую систему и, благодаря приданным ему особым свойствам, учитываемым посредством численного анализа, может удовлетворять необходимым условиям контакта. В частности, такой подход позволяет конструктивную нелинейность, то есть задачи с односторонними связями и трением Кулона, свести к рассмотрению самого нелинейного дискретного контактного слоя. Кроме того, при определенных заданных характеристиках этого слоя расчетная схема контактной задачи может быть более приближена к реальному объекту (здесь имеется в виду возможность учета таких дополнительных факторов, как упругая податливость, начальная прочность, нелинейный характер деформирования контактного слоя). Различные численные схемы с использованием контактных элементов использовались в работах П. П. Гонтаровского, Т. Грота, Р. Гудмена, Ж. Дюбуа, М. В. Зернина, Б. Н. Киркача, А. Г. Кузьменко, Ю. Б. Мгалобекова, Е. М. Морозова, Г. П. Никишкова, В. Г. Орехова, В. Г. Пашнина, А. Н. Подгорного, С. Б. Ухова, Б. Фридриксона и других.

Для расчета упругих систем с дискретными односторонними связями применялись прямые итерационные методы, в частности те или иные разновидности так называемых алгоритмов переключения состояния связей (В. П. Аленин, А. М. Белостоцкий, М. В. Белый, Ю. К. Ведешкин, Е. Вилсон, Б. Парсонс, Л. П. Портаев, И. М. Рабинович, В. М. Фридман, В. С. Чернина, Н. Н. Шапошников и др.). Вследствие своей простоты методы переключения связей получили широкое распространение, хотя они не всегда гарантируют сходимость и могут приводить к закликиванию процесса расчета. Кроме того, необходимость многократного перебора состояния связей и, соответственно, многократного изменения структуры матрицы и решения системы уравнений требует больших затрат машинного времени.

При использовании методов последовательного нагружения заданная нагрузка прикладывается не сразу, а некоторыми шагами, вплоть до достижения своего окончательного значения. Положительной стороной пошагового процесса является то, что на его основе может быть получено

решение контактной задачи на любой ступени нагружения. Кроме того, он эффективен в том случае, когда решение зависит от истории нагружения (при учете контактного трения с заранее неизвестным нормальным давлением на контакте, начальной прочности односторонних связей, последовательности возведения и загрузки сооружения и т. п.). Пошаговые методы применялись в работах О. С. Зенкевича, С. С. Кленикова, И. Е. Люминарского, Л. П. Портаева, И. М. Рабиновича, А. Франкавиллы и других авторов.

Математическое исследование задач с односторонними связями в вариационной постановке впервые было проведено А. Синьорини и в дальнейшем продолжено в работах А. В. Вовкушевского, И. Главачека, Р. Гловински, Г. Дюво, А. С. Кравчука, Ж.-Л. Лионса, Л. А. Розина, Р. Тремольера, П. Панагиотопулоса, А. А. Спектора, Г. Фикера, А. М. Хлуднева, Б. А. Шойхета и др. Эти исследования служат теоретической базой для построения вариационных методов, в основе которых сведение исходной задачи с односторонними связями к задаче минимизации некоторого функционала с линейными ограничениями в виде неравенств (задаче математического программирования). Так, задача с идеальными односторонними связями сводится к задаче квадратичного программирования, для решения которой могут быть применены соответствующие процедуры (градиентного спуска, возможных направлений, множителей Лагранжа, перехода к двойственной задаче и др.). В случае неидеальных односторонних связей свести решение контактной задачи к проблеме минимизации соответствующего функционала в общем случае не представляется возможным. Кроме того, затруднено исследование свойств таких задач, связанное с доказательством существования и единственности решения. В частных случаях (когда предельные величины напряжений трения известны) постановки контактных задач с трением рассматривались А. В. Вовкушевским, Я. Гаслингером, Р. В. Гольдштейном, Г. Дюво, Дж. Калкером, Л. Кампосом, Н. Кикучи, А. С. Кравчуком, Ж.-Л. Лионсом, А. Д. Ловцовым, Дж. Оденом, Л. А. Розиным, А. А. Спектором, Е. Пайесом, П. Д. Панагиотопулосом, Б. А. Шойхетом и др.

В общем же случае решение односторонних контактных задач с трением может быть сведено к решению последовательности вспомогательных задач с идеальными односторонними связями. Наиболее известным из таких методов, пожалуй, является метод итераций по предельным силам трения, суть которого в устранении погрешностей выполнения условий трения Кулона итерационным путем. Известно большое число разновидностей данного метода, их исследованию посвящены работы

А. С. Кравчука, Г. Дюво, Ж.-Л. Лионса, П. Панагиотопулоса, А. Б. Фадеева и др. Несколько иная схема учета контактного трения реализована в методе итераций по зазору. Он также сводится к решению последовательности вспомогательных задач, а именно с асимптотическими граничными условиями, записанными для поверхностей с периодическим рельефом в виде зубцов (А. В. Вовкушевский, М. С. Смирнов, Б. А. Шойхет и др.).

Исследования, в которых рассматриваются дополнительные условия контакта, касаются, прежде всего, учета деформаций в односторонних связях (А. В. Вовкушевский, М. С. Смирнов, Х. Френсис и др.), начальной прочности связей (Х. Вернер, А. В. Вовкушевский, К. Кац), физически-нелинейных свойств контактного слоя (А. П. Бабин, М. В. Зернин, А. Г. Кузьменко и др.), а также некоторых других факторов, в частности, последовательности возведения и загрузки сооружения (А. В. Вовкушевский, В. К. Тринчер, В. Д. Харлаб и др.).

Помимо решения статических (квазистатических) контактных задач, в которых не учитываются эффекты инерции, нередки случаи, когда требуется учитывать динамические воздействия на сооружение (в виде импульсных нагрузок, вынужденных колебаний и др.). Численное решение динамических задач с односторонними связями производится путем дискретизации по времени, при этом для каждого временного шага решается соответствующая контактная задача с использованием подходящего численного метода. Отметим здесь работы Б. Д. Аннина, А. М. Белостоцкого, П. Вригерса, Ю. Б. Гольдштейна, Т. А. Ларсена, И. Е. Люминарского, А. Н. Потапова, В. М. Садовского, Т. Хугеса, Н. Н. Шапошникова.

Из приведенного обзора видно, что постановкам и методам решения задач с односторонними связями посвящено большое число работ, что подтверждает важность и актуальность исследований в данной области. Вместе с тем нуждаются в дальнейшем развитии методы решения задач с трением при неизвестных заранее нормальных силах взаимодействия на контакте, а также осложненных какими-либо дополнительными факторами, как это часто бывает в практических задачах. Последовательность приложения нагрузки в этих случаях играет весьма существенную роль, этим обосновывается необходимость и целесообразность применения инкрементальных (пошаговых) методов. Исследованиям в этом направлении и посвящена настоящая диссертация.

Первая глава посвящена построению расчетных моделей контактного взаимодействия упругих систем с использованием контактных конечных элементов и их численной реализации на базе метода пошагового анализа.

В разделе 1.1 рассматривается применение прямых конечно-элементных моделей и методов их расчета для решения задач с односторонними связями. Такой подход широко используется в строительной механике, являясь основой для большинства прикладных компьютерных программ. Согласно прямым схемам МКЭ выбираются необходимые для решения рассматриваемой задачи типы конечных элементов, и из них составляется расчетная схема, аппроксимирующая данную задачу. Расчет полученной таким образом дискретной системы выполняется на базе известных численных методов. К достоинствам прямых методов можно отнести то, что с их помощью можно ставить и приближенно решать сложные задачи, встречающиеся на практике, такие, для которых непосредственное математическое описание затруднительно.

Далее представлен краткий обзор по некоторым численно-дискретным контактными алгоритмам, используемым при решении задач с односторонними связями. Делается акцент на применение для моделирования односторонних связей контактных конечных элементов (ККЭ), дискретизирующих некоторый тонкий контактный слой – фиктивный или имеющий место в действительности. Рассмотрены ККЭ различного типа, как стержневые, так и сплошные, используемые при решении контактных задач теории упругости. Отмечены недостатки и достоинства применения указанных контактных элементов.

В разделе 1.2 для моделирования односторонних связей предлагается использовать ККЭ в виде стержневой системы – плоской или пространственной рамы. Данные ККЭ взаимодействуют с обычными конечными элементами двумерных, либо трехмерных задач, и обеспечивают контакт между узлами сетки, расположенными на граничных поверхностях контактирующих тел (рис. 1). Приводится методика построения в явном виде матрицы жесткости для ряда рамно-стержневых ККЭ, в основе которой – исключение соответствующих степеней свободы из некоторой вспомогательной системы.

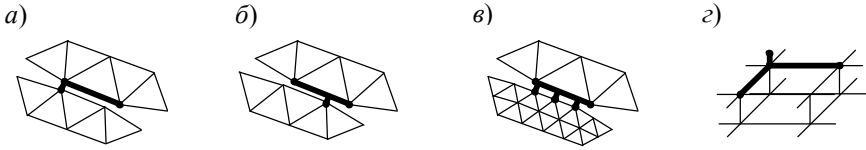


Рис. 1. Семейство контактных конечных элементов рамного типа

При использовании указанных контактных элементов нет необходимости в совпадении координат узлов контактирующих поверхностей, т. е. могут применяться несогласованные сетки. Для разных задач контактного взаимодействия ККЭ могут вводиться как сразу, так и последовательно – по мере установления контактов между граничными поверхностями тел, выполняя тем самым функции регистрации состояния участков контакта (или отрыва) соприкасающихся поверхностей, а также моделируя различные условия контакта (сцепления, проскальзывания и т. п.). Кроме того, посредством ККЭ могут учитываться различные свойства односторонних связей, такие, например, как упругая податливость, физическая нелинейность, начальная прочность и т. п.

Моделирование условий контакта осуществляется посредством пошагового изменения физических свойств контактного слоя, а именно его нормальной и касательной жесткостей. Данные жесткости, в свою очередь, выражаются через соответствующие жесткостные характеристики отдельных стержней рамных ККЭ. Так, состояние контакта в направлении нормали, либо сцепления поверхностей по касательной, реализуется путем задания жесткостей ККЭ (в нормальном, либо касательном направлении), соответствующих заданным упругим свойствам контактного слоя. Состояние проскальзывания граничных поверхностей моделируется заданием нулевых значений касательных жесткостей рамных ККЭ. Состояние отрыва (выключенной связи) реализуется назначением нулевых жесткостей ККЭ в обоих направлениях, либо исключением его из расчетной схемы. Нелинейный характер деформирования упругого слоя также учитывается через нелинейные свойства рамно-стержневых контактных элементов, например, задается диаграммой, связывающей внутренние усилия в стержнях ККЭ с их деформациями.

В разделе 1.3 приводятся постановки задач с идеальными односторонними связями как для случая жесткого контакта упругих тел в направлении нормали, так и с учетом дополнительной податливости контактного слоя.

В разделе 1.4 рассматриваются вопросы построения алгоритма численной реализации приведенных выше граничных условий на базе предложенных моделей ККЭ и метода пошагового анализа. Контактный слой при этом считается недеформируемым, т. е. податливость односторонних связей не учитывается.

Пусть имеются два линейно упругих тела V^+ и V^- в двумерной области с контактирующими поверхностями соответственно S_c^+ и S_c^- . Используем для расчета указанной системы дискретную расчетную модель МКЭ (рис. 2). Считая k -й ККЭ как k -ю дискретную связь (по нормали) между узлами на S_c^+ и S_c^- , выразим условия на контакте в терминах усилий и перемещений для каждого k -го контактного элемента ($k \in S_c$, $S_c = S_c^+ \cup S_c^-$):

$$\left. \begin{aligned} u_{nk} &\leq \delta_{nk}^0, & N_k &\leq 0, & Q_k &= 0 \\ (u_{nk} - \delta_{nk}^0) N_k &= 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (1)$$

Здесь N_k – продольная сила в опорном стержне k -го ККЭ; Q_k – поперечная сила в этом же стержне; u_{nk} – взаимное смещение противоположащих узлов на S_c^+ и S_c^- по нормали ($u_{nk} = u_{nk}^{(i)} - u_{nk}^{(j)}$).

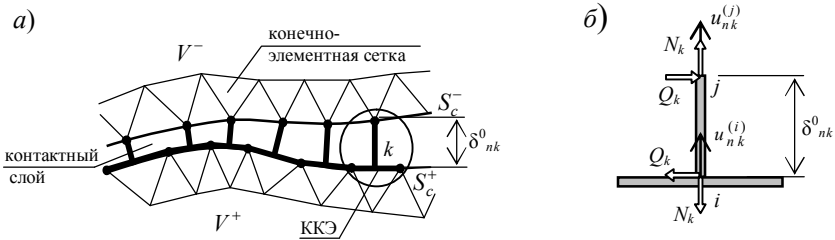


Рис. 2. Расчетная схема контактного взаимодействия при помощи рамных ККЭ

Численная реализация граничных условий (1) осуществляется посредством пошагового анализа процесса нагружения и изменения состояния контакта рассматриваемой системы. Так, если выполняется условие $(u_{nk} - \delta_{nk}^0) = 0$ и, следовательно, $N_k < 0$, то имеет место контакт по нормали между граничными поверхностями обоих тел (состояние

контакта). Если $(u_{nk} - \delta_{nk}^0) < 0$ и $N_k = 0$, то имеет место разрыв контакта по нормали (состояние отрыва). Изменение текущего состояния, а именно момент перехода от одного состояния к другому представляет собой событие – соответственно, в данном случае, это будут события отрыва или контакта. Таким образом, в процессе загрузки происходит цепь событий, определяющих состояние на контакте и последовательно изменяющих расчетную схему сооружения. Учет контактных условий будет заключаться в определении моментов наступления этих событий и соответствующем изменении расчетных схем сооружения.

Последовательное приложение нагрузки моделируется с помощью процесса пошагового нагружения, в котором заданная нагрузка P_0 прикладывается некоторыми шагами $\Delta P^s = \Delta \lambda^s P_0$, где $\Delta \lambda^s$ – параметр, определяющий величину s -го шага нагружения ($0 < \Delta \lambda^s \leq 1$). Предполагается, что между двумя последовательными событиями система деформируется по линейному закону – в этом случае в пределах каждого шага строится решение линейно упругой задачи, а события на контакте определяются согласно схеме простого нагружения. Пошаговый процесс осуществляется таким образом, чтобы каждая из этих линейных задач соответствовала одному шагу нагружения, выполняемому для каждой такой расчетной схемы, т. е. от момента наступления одного события на контакте до момента наступления следующего. В результате решение конструктивно нелинейной контактной задачи будет представляться в виде решения последовательности линейных задач при последовательном же изменении расчетных схем сооружения.

Приводится численный алгоритм, в котором шаги назначаются в результате пошагового анализа состояния контакта. Последовательность действий здесь состоит из пробных и основных шагов нагружения. Из анализа пробного шага определяется момент наступления очередного в процессе загрузки события (отрыва, либо контакта) и, соответственно, величина необходимого при этом шага нагружения. Так, для задачи линейного деформирования величина уточненного (основного) шага определяется с помощью линейной аппроксимации решения, полученного на пробном шаге.

В результате выполнения основного шага устанавливается новое состояние контакта (т. е. меняется текущая расчетная схема) и, в свою очередь, на основе анализа изменения рабочей схемы назначается следующий шаг нагружения. Предлагаемый подход, по сравнению с известными

пошаговыми алгоритмами, позволяет уточнять величину не только текущего шага, но и прогнозировать дальнейшие шаги и, таким образом, строить оптимальный, с точки зрения продолжительности и трудоемкости вычислений, процесс нагружения.

В разделе 1.5 представлены результаты численных расчетов некоторых контактных задач (в том числе тестового характера), полученные посредством изложенного выше алгоритма пошагового анализа. На простых примерах показан каждый шаг алгоритма численной реализации, проведено тестирование алгоритма на модельных задачах, решена задача, имеющая практическое применение. На основании анализа полученных результатов можно заключить, что предлагаемый пошаговый алгоритм показывает удовлетворительную внутреннюю сходимость и дает вполне приемлемое по точности решение двумерной задачи с односторонними идеальными (без учета трения) связями.

Выполненные в данной главе диссертации исследования позволяют сделать следующие выводы:

- в основе приведенного численного подхода лежит пошаговый процесс нагружения, имеющий ясную физическую интерпретацию, на каждом уровне нагружения здесь предоставляется возможность отслеживать текущее состояние рассчитываемой системы, включая определение уровня нагружения, соответствующего моменту наступления очередного события на контакте;
- для моделирования односторонних связей используются контактные конечные элементы в виде стержневой системы (рамы), что позволяет вычислять контактные усилия с той же точностью, что и узловые перемещения в расчетной области;
- при расчете линейно-деформируемых систем с идеальными односторонними связями пошаговый процесс сходится к решению за конечное число шагов нагружения.

Во второй главе рассматривается решение контактных задач при наличии на контакте кулоновского трения.

При численной реализации используется конечномерный аналог контактной задачи с трением, полученный при дискретизации исходной задачи МКЭ с использованием предложенных ранее рамно-стержневых контактных элементов. Предполагается, что процесс загрузки является простым и между двумя последовательными событиями на контакте, т. е. в пределах каждой рабочей схемы, характер деформирования системы является линейным.

В разделе 2.1 изложены постановки граничных условий контакта с учетом сил трения. Приводится полная система граничных условий для задачи с односторонними связями и трением Кулона при наличии деформируемого слоя между контактирующими поверхностями.

В разделе 2.2 рассматривается задача, где требуется учитывать трение Кулона в условиях двухстороннего контакта между граничными поверхностями упругих тел при заданных нормальных силах взаимодействия. Контактные условия, отвечающие кулоновскому трению, в терминах усилий и перемещений для каждого k -го ККЭ будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} |Q_k| \leq |Q_{pk}| = -f_k N_k, \quad N_k < 0 \\ Q_k u_{\tau k} \geq 0, \quad (Q_k - Q_{pk}) u_{\tau k} = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (2)$$

Здесь f_k – коэффициент трения на k -м дискретном контакте; Q_{pk} – предельная поперечная сила, соответствующая предельному касательному напряжению, но противоположная ему по направлению.

Обратимся к условиям взаимодействия на контакте в процессе квазистатического пошагового нагружения рассматриваемой системы. Так, если $u_{\tau k} = 0$, $|Q_k| < |Q_{pk}|$ (условия допредельного трения), то имеет место состояние сцепления. При $u_{\tau k} \neq 0$, $|Q_k| = |Q_{pk}|$ (условия предельного трения) – состояние скольжения. Изменение текущего состояния, а именно момент перехода от состояния сцепления к состоянию скольжения и наоборот, представляет собой событие проскальзывания или событие зацепления.

Аналогично численному алгоритму, изложенному в первой главе, здесь также используются пробные (вспомогательные) шаги нагружения. Цель пробного шага – определить момент наступления очередного в процессе нагружения события – проскальзывания либо зацепления и, соответственно, величину необходимого при этом шага нагружения. Основной шаг, пересчитываемый по результатам пробного шага, фиксирует наступившее событие.

Далее излагается пошаговый алгоритм решения контактной задачи при наличии трения Кулона для случая, когда нормальные силы взаимодействия на контакте не меняются в процессе нагружения. Приведенный алгоритм иллюстрируется численными примерами (тестовыми задачами), демонстрирующими получение достоверного и физически приемлемого решения за сравнительно небольшое число шагов нагружения.

В разделе 2.3 рассматриваются вопросы численной реализации граничных условий с трением Кулона для случая, когда нормальные силы взаимодействия на контакте не заданы, а зависят от решения задачи. При этом контактная задача значительно усложняется как в математическом отношении – для нее не существует доказательств единственности решения, так и, соответственно, в возможности получения приближенного решения численными методами. В этой связи, учет характера и последовательности нагружения, хотя и не гарантирует сходимости к единственному решению, однако, по крайней мере, сужает множество возможных решений.

В основе численного подхода здесь также реализуется метод пошагового анализа состояния контакта, при этом в пределах основного шага (т.е. текущей рабочей схемы) используется линейная аппроксимация для предельных сил трения, что дает возможность применения более крупных, чем в обычном пошаговом процессе, шагов нагружения. С помощью анализа и уточнения шагов нагружения строится возможное решение контактной задачи, которое является физически приемлемым и удовлетворяет всем уравнениям состояния и граничным условиям, в том числе условиям на контакте.

Модификация изложенного ранее алгоритма касается, прежде всего, тех поправок и дополнений, которыми учитывается, во-первых, сам фактор изменения предельных сил трения в процессе нагружения, во-вторых, характер этих изменений и влияние его на ход пошагового процесса. Так, момент наступления события проскальзывания на k -м контакте, при котором выполняется условие $\left| Q_k^{s+1} \right| = \left| Q_{pk}^{s+1} \right|$, определяется с учетом изменяющейся на шаге предельной силы трения. Кроме того, для связей, находящихся в состоянии скольжения, необходимо отслеживать характер изменения предельных сил трения на контакте. Если на каком-либо шаге предельная сила превысит реакцию трения, т.е. $\left| \tilde{Q}_{pk} \right| > \left| \tilde{Q}_k \right|$, то необходимо вернуться к состоянию сцепления на k -м контакте. Если же предельная сила снижается, то при сохранении состояния скольжения следует произвести корректировку сил трения на k -м контакте (и, соответственно, поперечной силы в k -м ККЭ).

Далее рассматриваются дополнения в пошаговый алгоритм, реализующие соответствующие схемы уточнения основного шага и выполняемой при этом корректировки контактных усилий в зависимости от характера изменения предельных сил трения на текущем шаге нагружения.

Предложенные схемы построения решения контактной задачи для случая изменяющихся предельных сил трения проиллюстрированы численными примерами. Результаты пошагового расчета сопоставлялись с решениями соответствующих задач, полученными методом итераций по предельным силам трения. Результаты практически совпадают, что свидетельствует об их достоверности, а также эффективности предлагаемого подхода.

В разделе 2.4 излагается общий алгоритм расчета упругих систем с односторонними связями и трением Кулона, в котором используются рассмотренные выше контактные модели и численные схемы их расчета. Основные положения, на которых строится общий алгоритм, аналогичны тем, что были приведены ранее.

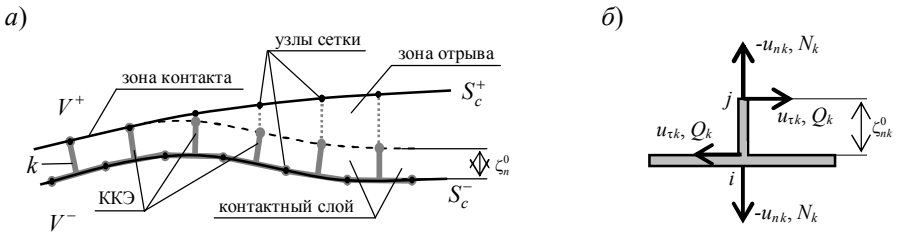


Рис. 3. Схема контактного взаимодействия при односторонних связях с трением Кулона

Граничные условия в терминах усилий и перемещений для k -го ККЭ (рис. 3) имеют здесь следующий вид (без учета податливости связей):

$$\left. \begin{aligned} u_{nk} \leq \delta_{nk}^0, \quad N_k \leq 0, \quad (u_{nk} - \delta_{nk}^0) N_k = 0 \\ |Q_k| \leq |Q_{pk}|, \quad Q_k u_{\tau k} \geq 0, \quad (Q_k - Q_{pk}) u_{\tau k} = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (3)$$

Условия взаимодействия на контакте формулируем через смещения и усилия в ККЭ. При $u_{nk} < \delta_{nk}^0$, $N_k = 0$ – имеет место состояние отрыва. При $u_{nk} = \delta_{nk}^0$, $N_k < 0$, $|Q_k| < |Q_{pk}|$, $u_{\tau k} = 0$ – состояние сцепления (допредельного трения). При $u_{nk} = \delta_{nk}^0$, $N_k < 0$, $|Q_k| = |Q_{pk}|$, $u_{\tau k} \neq 0$ – состоянии контакта со скольжением (предельного трения). Момент перехода от одного состояния к другому представляет собой соответственно событие выключения, включения односторонней связи, проскальзывания или зацепления.

Пусть в конце s -го шага нагружения, при уровне нагружения λ^s (принятого за исходный), состояние на контакте $S_c = S_c^+ \cup S_c^-$ известно. Для каждой k -й дискретной связи (т. е. k -го ККЭ, $k \in S_c$) определены значения взаимных смещений u_{nk}^s , $u_{\tau k}^s$ и контактных усилий N_k^s , Q_k^s . Будем считать, что на данный момент часть связей ($k \in S_{1c}$, $S_{1c} = S_{1c}^+ \cup S_{1c}^-$) находится в состоянии сцепления, другая часть ($k \in S_{2c}$, $S_{2c} = S_{2c}^+ \cup S_{2c}^-$) – в состоянии контакта со скольжением, и, наконец, третья часть связей ($k \in S_{3c}$, $S_{3c} = S_{3c}^+ \cup S_{3c}^-$) – в состоянии отрыва. При этом $S_c = S_{1c} \cup S_{2c} \cup S_{3c}$.

В начале расчета (т. е. при нулевом уровне нагружения) условия на контакте устанавливаются согласно заданной расчетной схеме, например, для всех связей изначально задается состояние контакта со сцеплением. Взаимные перемещения и контактные усилия в этом случае принимаются нулевыми.

1. Выполняется $(s+1)$ -й пробный шаг нагружения с параметром $\Delta\tilde{\lambda}^{s+1}$. Для каждого k -го ККЭ определяются приращения взаимных перемещений и контактных усилий: $\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}$, $\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1}$, $\Delta\tilde{N}_k^{s+1}$, $\Delta\tilde{Q}_k^{s+1}$, а также приращение предельной поперечной силы $\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1} = \text{sign}(\Delta\tilde{Q}_k^{s+1}) \cdot f_k \left| \Delta\tilde{N}_k^{s+1} \right|$.

2. Для связей, находящихся в состоянии скольжения, проверяется возможность перехода их в состояние сцепления, что определяется сменой знака приращения касательного смещения на данном шаге $\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1}$:

$$\left(\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1} / \Delta u_{\tau k}^s \right) < 0, \quad \Delta u_{\tau k}^s \neq 0, \quad k \in S_{2c}. \quad (4)$$

Из связей, удовлетворяющих условию (4), выбирается та, для которой имеет место наибольшее по модулю относительное приращение касательных перемещений. Для этой связи устанавливается состояние сцепления и повторно выполняется $(s+1)$ -й пробный шаг, т. е. следует переход к п. 1.

3. Кроме того, для связей в состоянии скольжения анализируется характер изменения предельных сил трения на контакте. Так, если приращение предельной силы трения для k -й связи превысит приращение поперечной силы в k -м ККЭ (в относительных величинах):

$$\frac{\left| \tilde{Q}_{pk}^{s+1} \right| - \left| Q_{pk}^s \right|}{\Delta\tilde{\lambda}^{s+1}} > \frac{\left| Q_k^s \right| - \left| Q_k^{s-1} \right|}{\Delta\lambda^s}, \quad k \in S_{2c}, \quad (5)$$

то следует вернуться к состоянию сцепления для этой связи и повторить $(s+1)$ -й пробный шаг нагружения (переход к п. 1).

4. В предположении линейного деформирования системы от исходного уровня λ^s до момента наступления очередного события на контакте для каждой k -й связи определяется величина требуемого для этого шага, а именно:

– момент проскальзывания для k -й связи, находящейся в состоянии сцепления:

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left(\frac{Q_{pk}^s - Q_k^s}{\Delta\tilde{Q}_k^{s+1} - \Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}} \right), \quad k \in S_{1c}; \quad (6)$$

– момент отрыва (т. е. выключения) для k -й односторонней связи, находящейся до этого в состоянии контакта (включенной связи):

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left(\frac{-N_k^s}{\Delta\tilde{N}_k^{s+1}} \right), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}; \quad (7)$$

– момент контакта (т. е. включения) k -й односторонней связи, находящейся до этого в состоянии отрыва (выключенной связи):

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left(\frac{\delta_{nk}^0 - u_{nk}^s}{\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}} \right), \quad k \in S_{3c}. \quad (8)$$

5. Из всех значений $\Delta\lambda_k^s$, найденных с помощью (6)–(8), выбирается наименьшее, что соответствует наступлению ближайшего события на контакте:

$$\Delta\lambda_C^{s+1} = \min(\Delta\lambda_k^{s+1}), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}, S_{3c}. \quad (9)$$

Проверяется ограничение сверху: $\lambda^s + \Delta\lambda_C^{s+1} \leq 1$. Если данное условие нарушается, то принимается $\Delta\lambda_C^{s+1} = 1 - \lambda^s$.

6. В случае, если на пробном шаге предельные силы трения для всех связей, находящихся в состоянии скольжения, постоянны (т. е. $\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1} = 0$, $k \in S_{2c}$) или зона проскальзывания отсутствует ($S_{2c} = 0$), то перерасчет шага не производится. В этом случае перемещения и усилия для уточненного основного шага $\Delta\lambda^{s+1} = \Delta\lambda_C^{s+1}$ определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
u_{nk}^{s+1} &= u_{nk}^s + \Delta u_{nk}^{s+1}, & \Delta u_{nk}^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1}/\Delta\tilde{\lambda}^{s+1})\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}, \\
u_{\tau k}^{s+1} &= u_{\tau k}^s + \Delta u_{\tau k}^{s+1}, & \Delta u_{\tau k}^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1}/\Delta\tilde{\lambda}^{s+1})\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1}, \\
N_k^{s+1} &= N_k^s + \Delta N_k^{s+1}, & \Delta N_k^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1}/\Delta\tilde{\lambda}^{s+1})\tilde{N}_k^{s+1}, \\
Q_k^{s+1} &= Q_k^s + \Delta Q_k^{s+1}, & \Delta Q_k^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1}/\Delta\tilde{\lambda}^{s+1})\tilde{Q}_k^{s+1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Далее следует переход к п. 9.

7. В случае, если предельные силы трения (хотя бы для одной связи на S_{2c}) изменяются, т. е. $\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1} \neq 0$, $k \in S_{2c}$, а также выполняется условие

$$\frac{\left| \tilde{Q}_{pk}^{s+1} \right| - \left| Q_{pk}^s \right|}{\Delta\tilde{\lambda}^{s+1}} \leq \frac{\left| Q_k^s \right| - \left| Q_k^{s-1} \right|}{\Delta\lambda^s}, \quad k \in S_{2c}, \tag{11}$$

то необходимо произвести перерасчет шага с уточненным параметром $\Delta\lambda^{s+1}$, который, в свою очередь, принимается равным минимальному из значений:

$$\Delta\lambda^{s+1} = \min(\Delta\lambda_C^{s+1}, \Delta\lambda_P^{s+1}), \tag{12}$$

где $\Delta\lambda_P^{s+1} = \min(\Delta\lambda_k^{s+1})$; $\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left| \varepsilon_p Q_{pk}^s / \Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1} \right|$ при $\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1} \neq 0$, иначе $\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\lambda_{\max}$, $k \in S_{2c}$; ε_p – заданная относительная точность вычислений; $\Delta\lambda_{\max}$ – заданный максимальный шаг нагружения.

Перед перерасчетом шага производится корректировка поперечной силы в k -м ККЭ (при сохранении состояния скольжения на данном контакте):

$$Q_k^{s+1} = Q_k^s + \Delta Q_{ck}^{s+1}, \quad \Delta Q_{ck}^{s+1} = \Delta Q_{pk}^{s+1} + \delta Q_k^s, \quad k \in S_{2c}, \tag{13}$$

а к противоположным узлам контактных поверхностей прикладываются компенсирующие силы F_{ck}^{s+1} , равные ΔQ_{ck}^{s+1} , но с противоположным знаком:

$$F_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{pk}^{s+1} - \delta Q_k^s, \quad k \in S_{2c}. \tag{14}$$

Здесь $\Delta Q_{pk}^{s+1} = \frac{\Delta\lambda^{s+1}}{\Delta\tilde{\lambda}^{s+1}} \Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}$ – приращение предельной поперечной силы на основном шаге $\Delta\lambda^{s+1}$; $\delta Q_k^s = Q_{pk}^s - Q_k^s$ – невязка поперечных сил, образующаяся на предыдущем шаге. Более подробно процедура корректировки сил трения изложена в разделе 2.3 диссертационной работы.

8. В результате перерасчета системы с шагом $\Delta\lambda^{s+1}$ определяются приращения взаимных смещений и контактных усилий Δu_{nk}^{s+1} , $\Delta u_{\tau k}^{s+1}$, ΔQ_k^{s+1} , ΔN_k^{s+1} , конечные значения смещений и усилий для уточненного шага $\Delta\lambda^{s+1}$:

$$\begin{aligned} u_{nk}^{s+1} &= u_{nk}^s + \Delta u_{nk}^{s+1}, & u_{\tau k}^{s+1} &= u_{\tau k}^s + \Delta u_{\tau k}^{s+1}, \\ Q_k^{s+1} &= Q_k^s + \Delta Q_k^{s+1}, & N_k^{s+1} &= N_k^s + \Delta N_k^{s+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

а также значения предельной поперечной силы для каждого контакта:

$$Q_{pk}^{s+1} = \text{sign}(\Delta Q_k^{s+1}) \cdot f_k \left| N_k^{s+1} \right|. \quad (16)$$

9. Проверяются условия наступления ожидаемого события:

– в случае наступления события проскальзывания:

$$\left| (Q_{pk}^{s+1} - Q_k^{s+1}) / Q_{pk}^{s+1} \right| \leq \varepsilon_Q, \quad k \in S_{1c};$$

– в случае наступления события отрыва: $\left| N_k^{s+1} / N_{k\max} \right| \leq \varepsilon_N, \quad k \in S_{1c}, S_{2c};$

– в случае наступления события контакта:

$$\left| (u_{nk}^{s+1} - \delta_{nk}^0) / \zeta_{nk}^0 \right| \leq \varepsilon_u, \quad k \in S_{3c}.$$

Если соответствующее условие (с учетом заданной точности вычислений ε_Q , ε_N или ε_u) не срабатывает, то выполненный основной шаг засчитывается как пробный, т. е. принимаем $\Delta\tilde{\lambda}^{s+1} = \Delta\lambda^{s+1}$. Следует повторное уточнение основного шага, начиная с п. 2.

При подтверждении наступления ожидаемого события – для данной связи устанавливается новое состояние, тем самым меняется рабочая схема сооружения. Пересчитанный основной шаг считается завершенным, а его результаты – окончательными для $(s+1)$ -го уровня нагружения.

10. Устанавливается исходный уровень $\lambda^{s+1} = \lambda^s + \Delta\lambda^{s+1}$ для следующего шага нагружения. Если $\lambda^{s+1} < 1$, то цикл пошагового расчета повторяется, начиная с п. 1. Если же $\lambda^{s+1} = 1$, то следует завершение пошагового процесса.

В случае продолжения пошагового расчета для назначения параметра следующего пробного шага $\Delta\tilde{\lambda}^{s+2}$ используются выражения, аналогичные (6)–(8). Принимается наименьшее из значений $\Delta\tilde{\lambda}_k^{s+2}$, полученных для каждой k -й связи $\Delta\tilde{\lambda}^{s+2} = \min(\Delta\tilde{\lambda}_k^{s+2})$. Если $\lambda^{s+1} + \Delta\tilde{\lambda}^{s+2} > 1$, принимается $\Delta\tilde{\lambda}^{s+2} = 1 - \lambda^{s+1}$.

В разделе 2.5 представлены результаты расчетов некоторых двумерных контактных задач с учетом трения Кулона, полученные с помощью предлагаемого численного подхода. Целью проводимых исследований является иллюстрация работоспособности разработанных пошаговых алгоритмов и вычислительных программ, возможности построения с их помощью физически приемлемого и правдоподобного численного решения контактных задач с трением, а также практического применения изложенных в работе методик к расчету сооружений с односторонними неидеальными связями. Достоверность результатов проведенных расчетов подтверждается анализом и сопоставлением их с численными решениями, полученными с помощью других методов.

Для проведения численных исследований в данной работе использовалась разработанная автором вычислительная программа "Решение двумерных задач контактного взаимодействия с учетом односторонних связей и трения Кулона методом конечных элементов". Программа предназначена для решения контактных задач в двумерной постановке, как при статических, так и при динамических воздействиях. Для учета односторонних связей и трения Кулона в программе реализованы разработанные автором модели контактного взаимодействия с использованием рамно-стержневых контактных элементов, а также изложенные выше алгоритмы пошагового расчета. Указанная программа является составной частью созданного автором комплекса вычислительных программ научно-исследовательского и учебно-методического характера, зарегистрированных в Российском научно-техническом информационном центре, а также в реестре программ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации. В разделе 2.5 приводится краткое описание данного комплекса программ.

Рассматривается ряд двумерных задач расчета конструкций и сооружений, демонстрирующих работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов и соответствующих программ численного расчета систем с односторонними неидеальными (с трением) связями. Результаты, полученные пошаговым методом, сопоставляются с решениями тех же задач итерационными методами (в частности, методом итераций по зазорам и методом итераций по предельным силам трения). Расхождение в значениях взаимных смещений на контакте не превышает 2%, контактных напряжений – 8%. Зоны контакта и отрыва граничных поверхностей имеют те же размеры и расположение. Таким образом, результаты проведенных расчетов демонстрируют достаточную точность и хорошую внутреннюю сходимость разработанных алгоритмов для рассмотренных здесь

односторонних контактных задач с кулоновским трением на контакте.

В целом же проведенные в данной главе исследования позволяют сделать следующие выводы:

- в основе изложенных алгоритмов лежит метод пошагового анализа процесса нагружения и изменения состояния контакта, имеющий прозрачный физический смысл и позволяющий отслеживать текущее состояние контакта на каждом уровне нагружения;
- при линейном характере деформирования системы и при заданных предельных силах трения учет последовательности нагружения приводит к единственному решению, пошаговый процесс сходится за конечное, сравнительно небольшое, число шагов нагружения;
- в случае, когда нормальные силы взаимодействия на контакте не заданы, а зависят от решения задачи, разработанные пошаговые алгоритмы дают вполне достоверные результаты, что подтверждается их анализом и сопоставлением с решениями, полученными с помощью других численных методов.

Третья глава посвящена численной реализации предложенных моделей для решения контактных задач на динамические нагрузки. Конструктивная нелинейность в этом случае проявляется в смене рабочих схем сооружения по времени – включение и выключение односторонних связей, как в нормальном, так и касательном направлении. Непосредственное решение динамической контактной задачи строится на основе дискретизации по времени с использованием прямого численного интегрирования. Если в пределах некоторого шага Δt происходит смена рабочей схемы, то момент времени изменения состояния контакта, т. е. наступления очередного события, определяется путем пошагового анализа с использованием соответствующих аппроксимирующих выражений для перемещений, скоростей и ускорений на шаге по времени Δt . При этом корректируется продолжительность временного шага и производится его перерасчет. В результате устанавливается новое состояние контакта на данный момент времени и, таким образом, меняется текущая рабочая схема сооружения.

В разделе 3.1 приводится конечно-элементная формулировка для плоской динамической задачи взаимодействия линейно упругих тел V^+ и V^- с контактирующими поверхностями соответственно S_c^+ и S_c^- . Для расчета указанной дискретной системы справедливо следующее матричное уравнение движения с начальными условиями:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t}; \quad \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{U}}_0, \quad (17)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости системы конечных элементов; $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ и $\mathbf{P}^{t+\Delta t}$ – векторы узловых перемещений, скоростей, ускорений и внешней узловой нагрузки в момент времени $t+\Delta t$. Кроме того, на части внешних границ S_g^+ , S_g^- должны быть заданы граничные условия в усилиях, а на S_u^+ , S_u^- – в перемещениях.

Принимая во внимание, что перемещение в момент времени $t+\Delta t$ можно представить как $\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t}$, где $\Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ – приращение перемещений на шаге Δt , преобразуем уравнение (17) к виду, позволяющему решению конструктивно нелинейной динамической задачи свести к решению последовательности линейных динамических задач на основе пошагового по времени анализа состояния контакта. На каждом шаге по времени Δt будет решаться система линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{K}\mathbf{U}^t. \quad (18)$$

Здесь предполагается, что в начальный момент времени (при $t=0$) известны векторы перемещений, скоростей и ускорений и необходимо найти решение (18) на интересующем нас интервале времени от 0 до некоторого значения T .

Для численного интегрирования уравнений (18) используется неявная конечно-разностная схема Ньюмарка, в основе которой предположение о линейном изменении ускорений в интервале Δt . При этом в любой момент времени t' в пределах интервала Δt ($t \leq t' \leq t + \Delta t$) значения ускорений $\ddot{\mathbf{U}}(t')$, скоростей $\dot{\mathbf{U}}(t')$ и перемещений $\mathbf{U}(t')$ могут быть рассчитаны по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}(t') &= \ddot{\mathbf{U}}^t + \frac{(t'-t)}{\Delta t} [\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}^t]; & \dot{\mathbf{U}}(t') &= \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{(t'-t)}{2} [\dot{\mathbf{U}}^t + \dot{\mathbf{U}}^{t'}]; \\ \mathbf{U}(t') &= \mathbf{U}^t + (t'-t)\dot{\mathbf{U}}^t + \frac{(t'-t)^2}{4} [\ddot{\mathbf{U}}^t + \ddot{\mathbf{U}}^{t'}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Первое из уравнений (19) выражает линейный закон изменения ускорения на интервале Δt , второе и третье получаются из аппроксимирующих выражений метода Ньюмарка при подстановке в них значений $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/2$ и замены величины $(t+\Delta t)$ на величину t' .

Кроме того, при учете односторонних связей с трением Кулона дополнительно к начальным условиям при $t=0$ и граничным на S_g^\pm , S_u^\pm

должны выполняться также следующие условия на контактных поверхностях S_c^+ , S_c^- , записанные для момента времени t :

$$\left. \begin{aligned} u_n^t - \delta_n^0 \leq 0, \quad \sigma_n^t \leq 0, \quad (u_n^t - \delta_n^0) \sigma_n^t = 0 \\ \left| \sigma_\tau^t \right| \leq -f \sigma_n^t, \quad \sigma_\tau^t \dot{u}_\tau^t \leq 0, \quad (\left| \sigma_\tau^t \right| + f \sigma_n^t) \dot{u}_\tau^t = 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in S_c. \quad (20)$$

Здесь u_n^t , u_τ^t – взаимные перемещения контактных поверхностей соответственно по нормали и по касательной в момент времени t ; $\dot{u}_\tau^t = \partial u_\tau^t / \partial t$ – скорость взаимных касательных перемещений; σ_n^t , σ_τ^t – нормальное и касательное напряжения на площадке контакте в момент времени t .

В разделе 3.2 излагается численный алгоритм решения динамической задачи с идеальными односторонними связями. Используя для моделирования контактного взаимодействия рамно-стержневые ККЭ, представим граничные условия без учета трения в терминах усилий и перемещений для каждого k -го ККЭ:

$$u_{nk}^t - \delta_{nk}^0 \leq 0, \quad N_k^t \leq 0, \quad Q_k^t = 0, \quad (u_{nk}^t - \delta_{nk}^0) N_k^t = 0, \quad k \in S_c, \quad (21)$$

где u_{ni}^t – взаимное смещение противоположащих узлов k -го ККЭ по нормали; N_i^t , Q_i^t – продольная и поперечная силы в k -м ККЭ в момент времени t .

Численное решение динамической задачи с идеальными односторонними связями, таким образом, будет заключаться в проведении процесса пошагового интегрирования по времени уравнений (18) при соответствующих начальных и граничных условиях, а также выполнении условий на контакте в виде (21). Приводится пошаговый алгоритм решения динамической задачи с идеальными односторонними связями.

В разделе 3.3 рассматривается решение динамической односторонней контактной задачи с учетом трения Кулона. Здесь условия (20) в терминах усилий и перемещений для каждого ККЭ примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^t - \delta_{nk}^0 \leq 0, \quad N_k^t \leq 0, \quad (u_{nk}^t - \delta_{nk}^0) N_k^t = 0 \\ \left| Q_k^t \right| \leq \left| Q_{pk}^t \right|, \quad Q_k^t \dot{u}_{\tau k}^t \geq 0, \quad (Q_k^t - Q_{pk}^t) \dot{u}_{\tau k}^t = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (22)$$

Здесь u_{nk}^t – взаимное перемещение противоположащих узлов k -го ККЭ на S_c^+ и S_c^- по нормали в момент времени t ; $\dot{u}_{\tau k}^t$ – скорость взаимного касательного перемещения (проскальзывания) этих узлов; N_k^t , Q_k^t – продольная и поперечная силы в k -м ККЭ в момент времени t ;

$Q_{pk}^t = \text{sign}(\dot{u}_{\tau k}^t) f_k |N_k^t|$ – предельная поперечная сила для момента t .

Считается, что в текущий момент времени t состояние на контакте известно. Для каждой k -й связи (т. е. k -го ККЭ) определены значения взаимных смещений u_{nk}^t , $u_{\tau k}^t$, скоростей $\dot{u}_{\tau k}^t$ и контактных усилий N_k^t , Q_k^t , Q_{pk}^t . Пусть часть связей ($k \in S_{1c}$) находится в состоянии сцепления, другая часть ($k \in S_{2c}$) – в состоянии контакта со скольжением и, наконец, третья часть связей ($k \in S_{3c}$) – в состоянии отрыва. При этом $S_c = S_{1c} \cup S_{2c} \cup S_{3c}$. В начале расчета (при $t = 0$) перемещения u_{nk}^0 и $u_{\tau k}^0$, (также, как скорости и ускорения) принимаются нулевыми. Задаются величины δ_{nk}^0 , которые, в частности, могут быть равны нулю.

1. Выполняется шаг по времени Δt . Из решения (18) определяются приращения перемещений $\Delta u_{nk}^{t+\Delta t}$, $\Delta u_{\tau k}^{t+\Delta t}$, затем перемещения $u_{nk}^{t+\Delta t}$, $u_{\tau k}^{t+\Delta t}$, скорости $\dot{u}_{\tau k}^{t+\Delta t}$ и усилия $N_k^{t+\Delta t}$, $Q_k^{t+\Delta t}$, $Q_{pk}^{t+\Delta t}$ для момента времени $t+\Delta t$.

2. Выполняется обход по всем ККЭ, при этом для каждой k -й связи находится (в пределах текущего шага Δt) момент \hat{t}_k наступления ближайшего по времени события на контакте: проскальзывания, зацепления, отрыва, либо контакта. Поскольку изменение перемещений, скоростей (и, следовательно, усилий) в пределах шага Δt , согласно уравнениям (19), происходит не по линейному закону, то для определения момента времени \hat{t}_k используется процедура последовательных приближений.

Таким образом, момент проскальзывания (при срабатывании условия $Q_i^t = Q_{pi}^t$) для каждой k -й связи, находящейся до этого в состоянии сцепления, вычисляется с помощью следующей итерационной формулы:

$$\hat{t}_k^i = t_{1k}^{i-1} + (t_{2k}^{i-1} - t_{1k}^{i-1}) \left(\frac{Q_{pk}(t_{1k}^{i-1}) - Q_i(t_{1k}^{i-1})}{[Q_k(t_{2k}^{i-1}) - Q_k(t_{1k}^{i-1})] - [Q_{pk}(t_{2k}^{i-1}) - Q_{pk}(t_{1k}^{i-1})]} \right), \quad k \in S_{1c}. \quad (23)$$

Здесь t_{1k}^{i-1} , t_{2k}^{i-1} – начало и конец интервала, в котором с помощью линейной интерполяции находится i -го приближения \hat{t}_k^i . Для первого приближения этот интервал (t_{1k}^0, t_{2k}^0) соответствует шагу Δt , т. е. $t_{1k}^0 = t$,

$t_{2k}^0 = t + \Delta t$, $Q_k(t_{1k}^0) = Q_k^t$, $Q_k(t_{2k}^0) = Q_k^{t+\Delta t}$, в дальнейшем, при последующих приближениях, интервал поиска сужается. Так, для очередного приближения \widehat{t}_k^i с помощью уравнений (23) выполняется пересчет взаимных смещений, а по ним и усилий $Q_k(\widehat{t}_k^i)$, $Q_{pk}(\widehat{t}_k^i)$ для момента времени \widehat{t}_k^i и сопоставление полученных величин с граничными значениями $Q_k(\widehat{t}_{1k}^{i-1})$, $Q_{pk}(\widehat{t}_{1k}^{i-1})$ и $Q_k(\widehat{t}_{2k}^{i-1})$, $Q_{pk}(\widehat{t}_{2k}^{i-1})$ для текущего интервала. В результате чего устанавливаются границы интервала (t_{1k}^i, t_{2k}^i) для следующего – $(i+1)$ -го приближения. Окончанием итерационного процесса служит достижение относительной разности величин $Q_k(\widehat{t}_k^i)$ и $Q_{pk}(\widehat{t}_k^i)$ некоторой заданной точности вычислений. При этом окончательно принимаем $\widehat{t}_k = \widehat{t}_k^i$.

Аналогично определяем момент зацепления (при срабатывании условия $\dot{u}_{\tau k}^t = 0$) для каждой k -й связи, находящейся до этого в состоянии скольжения:

$$\widehat{t}_k^i = t_{1k}^{i-1} + (t_{2k}^{i-1} - t_{1k}^{i-1}) \left(\frac{-\dot{u}_{\tau k}(t_{1k}^{i-1})}{\dot{u}_{\tau k}(t_{2k}^{i-1}) - \dot{u}_{\tau k}(t_{1k}^{i-1})} \right), \quad k \in S_{2c}. \quad (24)$$

Момент отрыва, т. е. выключения k -й односторонней связи (при срабатывании условия $N_k^t = 0$), находящейся до этого в состоянии контакта:

$$\widehat{t}_k^i = t_{1k}^{i-1} + (t_{2k}^{i-1} - t_{1k}^{i-1}) \left(\frac{-N_k(t_{1k}^{i-1})}{N_k(t_{2k}^{i-1}) - N_k(t_{1k}^{i-1})} \right), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}. \quad (25)$$

Момент контакта, т. е. включения k -й односторонней связи (при срабатывании условия $u_{nk}^t - \delta_{nk}^0 = 0$), находящейся в состоянии отрыва:

$$\widehat{t}_k^i = t_{1k}^{i-1} + (t_{2k}^{i-1} - t_{1k}^{i-1}) \left(\frac{\delta_{nk}^0 - u_{nk}(t_{1k}^{i-1})}{u_{nk}(t_{2k}^{i-1}) - u_{nk}(t_{1k}^{i-1})} \right), \quad k \in S_{3c}. \quad (26)$$

3. Из всех значений \widehat{t}_k , найденных с помощью формул (23)–(26) и находящихся в интервале $(t, t + \Delta t)$, выбирается наименьшее $\widehat{t} = \min(\widehat{t}_k)$, соответствующее моменту наступления ближайшего по времени события на контакте. При $\widehat{t} > t + \Delta t$ выполняется следующий шаг интегрирования Δt (т. е. следует переход к п. 1).

4. Если $t < \hat{t} < t + \Delta t$ – выполняется перерасчет уточненного таким образом шага с величиной $\Delta \hat{t} = \hat{t} - t$. При этом изменение предельных сил трения на контакте учитывается приложением к противоположным узлам k -го ККЭ на S_{2c}^+ , S_{2c}^- корректирующих сил (с соответствующим знаком):

$$\hat{F}_{\tau k} = -\Delta \hat{Q}_{pk} = -\frac{\Delta \hat{t}}{\Delta t} \cdot (Q_{pk}^{t+\Delta t} - Q_{pk}^t), \quad k \in S_{2c}. \quad (27)$$

На ту же величину корректируется значение поперечной силы в k -м ККЭ:

$$Q_k^{\hat{t}} = Q_k^t + \Delta \hat{Q}_{pk}, \quad k \in S_{2c}. \quad (28)$$

В результате перерасчета шага определяются значения $u_{nk}^{\hat{t}}$, $u_{\tau k}^{\hat{t}}$, $\dot{u}_{\tau k}^{\hat{t}}$, $N_k^{\hat{t}}$, $Q_k^{\hat{t}}$, $Q_{pk}^{\hat{t}}$ для текущего момента времени \hat{t} . Проверяются условия наступления ожидаемого события: в случае проскальзывания это будет условие $Q_k^{\hat{t}} = Q_{pk}^{\hat{t}}$; зацепления – $\dot{u}_{\tau k}^{\hat{t}} = 0$; отрыва – $N_k^{\hat{t}} = 0$; контакта – $(u_{nk}^{\hat{t}} - \delta_{nk}^0) = 0$. Если соответствующее условие (с учетом заданной точности вычислений) не срабатывает, выполняется повторное уточнение \hat{t} .

5. В случае наступления очередного по времени события – на соответствующей опоре меняется состояние контакта, тем самым меняется текущая рабочая схема сооружения, при этом результаты пересчитанного шага считаются конечными для момента времени \hat{t} . Далее повторяются все вышеперечисленные действия, но уже для следующего шага интегрирования Δt .

Изложенные в данной главе алгоритмы реализованы в разработанном автором комплексе вычислительных программ, описание которого приведено в разделе 2.5.

В разделе 3.4 рассматривается решение ряда динамических задач, демонстрирующих возможность использования предлагаемого подхода для разных случаев контактного взаимодействия, в частности:

- с односторонними связями при отсутствии трения;
- при двухстороннем контакте с учетом трения Кулона;
- при совместном учете односторонних связей и трения Кулона.

Исследовалась зависимость решения от величины шага интегрирования по времени, от степени сгущения конечно-элементной сетки, от величины коэффициента трения. Волновые процессы, исходя из характеристик рассчитываемых объектов и условий динамического воздействия, не учитывались.

По результатам проведенных численных исследований можно заключить, что представленные здесь решения динамических контактных задач являются достоверными и физически приемлемыми. При этом предложенный подход показывает удовлетворительную сходимость, устойчивость и точность решения в достаточно широком диапазоне шагов интегрирования по времени.

В четвертой главе рассматриваются некоторые приложения и обобщения результатов, изложенных ранее. Разработанные модели ККЭ и методы их расчета распространяются на решение задач с односторонними связями при учете физических свойств контактного слоя.

В разделе 4.1 излагаются вопросы, касающиеся моделирования и учета деформативных свойств (упругой податливости) контактного слоя, а также реализации данной модели на основе метода пошагового анализа с применением контактных конечных элементов рамно-стержневого типа.

В разделе 4.2 предлагается расчетная модель и методика учета начальной прочностью односторонних связей, как в нормальном, так и в касательном направлении. Подчеркнем, что здесь не рассматриваются вопросы, относящиеся непосредственно к разрушению материала тела. Прочность односторонних связей описывается упрощенными зависимостями, которые, однако, могут оказаться полезными при решении некоторых инженерных проблем.

Пусть условия, определяющие прочность контактного шва соответственно на разрыв и срез, согласно критерию прочности Кулона-Мора, имеют вид:

$$\sigma_n + \frac{|\sigma_\tau|}{\alpha_R} \leq R_n; \quad |\sigma_\tau| \leq R_\tau - \alpha_R \sigma_n, \quad \alpha_R = R_\tau / R_n. \quad (29)$$

В этом случае граничные условия на контакте могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk} \leq \delta_{nk}^0, \quad N_k + \frac{|Q_k|}{\alpha_R} \leq N_{Rk}, \quad (u_{nk} - \delta_{nk}^0) (N_k + \frac{|Q_k|}{\alpha_R} - N_{Rk}) = 0 \\ |Q_k| \leq Q_{Rk} - \alpha_R N_k, \quad Q_k u_{\tau k} \geq 0, \quad (Q_k - Q_{Rk} + \alpha_R N_k) u_{\tau k} = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (30)$$

Здесь N_{Rk} , Q_{Rk} – предельные контактные усилия растяжения и сдвига для k -й дискретной односторонней связи (т. е. ККЭ).

Условия (30) справедливы только до момента нарушения прочности связей в данной точке контакта, после чего будут действительны условия (3), описывающие непосредственно односторонние связи с трением.

Внеся соответствующие дополнения в алгоритм, изложенный в разделе 2.4, обеспечиваем в одном пошаговом процессе одновременный учет прочности контактного шва, а также раскрытия или трения его поверхностей на участках, где сцепление разрушено.

В разделе 4.3 для учета физической нелинейности контактного слоя рассматривается возможность использования разработанной рамно-стержневой модели и пошаговых схем ее расчета. Данная модель позволяет внешнюю нелинейность контактного слоя свести к внутренней нелинейности самих ККЭ (при этом нелинейные свойства слоя будут задаваться через нелинейные характеристики отдельных стержней ККЭ). В результате имеем следующее рекуррентное уравнение с итерационным уточнением приращений перемещений ΔU^{s+1} на каждом $(s+1)$ -м шаге нагружения:

$$\mathbf{K}_{\text{лин}} \Delta U_i^{s+1} = \mathbf{P}_{\text{лин}}^{s+1} - \left(\sum_{k \in S_{1c}, S_{2c}} \begin{Bmatrix} F_{nk}^+ \\ F_{nk}^- \end{Bmatrix} + \sum_{k \in S_{1c}} \begin{Bmatrix} F_{\tau k}^+ \\ F_{\tau k}^- \end{Bmatrix} \right)_{i-1}^{s+1}. \quad (31)$$

Здесь F_{nk}^+ , F_{nk}^- , $F_{\tau k}^+$, $F_{\tau k}^-$ – силы, прикладываемые на i -й итерации (в процессе уточнения ΔU^{s+1}) к противоположащим узлам контактных поверхностей S_c^+ и S_c^- соответственно по нормали и по касательной; S_{1c} – участок контакта в состоянии сцепления; S_{2c} – в состоянии скольжения.

Левая часть уравнений (31) для данной рабочей схемы контакта здесь не меняется, что позволяет провести факторизацию матрицы жесткости один раз, уточняя значение ΔU_i^{s+1} до тех пор, пока разница между двумя последующими итерациями не будет удовлетворять заданной точности расчета. Значения коррекционных сил, прикладываемых на каждой i -й итерации к противоположащим узлам контакта, подсчитываются по результатам предыдущей $(i-1)$ -й итерации.

Предлагаемые в главе схемы решения контактных задач проиллюстрированы соответствующими численными примерами. Результаты выполненных расчетов сопоставлялись с решениями, полученными с помощью других методов, а также с решением контактной задачи без дополнительных условий на контакте и, таким образом, оценивалось их влияния в односторонних связях.

В пятой главе приводятся результаты применения разработанных моделей и алгоритмов к решению ряда задач расчета конструкций и сооружений с односторонними связями.

В разделе 5.1 рассматривается решение контактной задачи при учете последовательного возведения и загрузки сооружения. Процесс вычислений здесь состоит из двух вложенных циклов. Внешний цикл – это этапы возведения сооружения, внутренний цикл – процедура пошагового анализа для решения контактной задачи на каждом из этапов.

В качестве примера рассмотрена задача контактного взаимодействия последовательно возводимых частей сооружения, разделенных вертикальным швом. Сопоставление полученных результатов свидетельствует о том, что при учете односторонних связей решение задачи зависит от схемы возведения сооружения, т. е. от числа этапов и может существенно отличаться от решения, полученного по схеме мгновенного возведения (в один этап).

В разделе 5.2 приводятся результаты расчетов некоторых гидротехнических сооружений, взаимодействующих с грунтовым основанием (при учете сил сцепления грунта). Решалась задача об устойчивости наклонного трубопровода против его сползания в условиях многоциклового температурного воздействия. Рассматривался фрагмент трубопровода – секция длиной 40 м и шириной подошвы 8 м, свободно лежащая на наклонном участке основания (из проекта Ленинградской ГАЭС). Расчет производился на собственный вес и цикл нагревания–охлаждения с учетом проскальзывания и возможного отрыва на контакте трубопровода с основанием. Целью расчетов являлась оценка влияния контактного взаимодействия на устойчивость отдельной секции трубопровода от сползания по склону, вызываемого многократным температурным воздействием. Получены зависимости для предельных значений изменения температуры и угла наклона подошвы секции к горизонтальной плоскости. Также решались и другие задачи взаимодействия сооружений с нескальным основанием, возникающие, в частности, при проектировании водосливных плотин и зданий ГЭС низконапорных гидроузлов.

В разделе 5.3 ставится и решается задача расчета сооружения, контактирующего с нескальным основанием при пространственном характере его нагружения и работы. Подобная задача имеет место при проектировании крайних секций водосливных плотин низконапорных гидроузлов. Помимо собственного веса сооружения и гидростатической нагрузки здесь необходимо учитывать нормальную и касательную составляющие давления грунта плотины, действующие на стенку сопрягающего устоя плотины. Эти довольно значительные по величине нагрузки создают дополнительные усилия сдвига и поворота крайней секции в плоскости

контакта ее подошвы с основанием. Для решения указанной задачи использовались ККЭ в виде пространственной рамы, а также изложенный ранее пошаговый алгоритм с учетом соответствующих специфике пространственной задачи дополнений (учитывающих, в частности, что касательные усилия и перемещения здесь являются векторными величинами).

Выполнены расчеты научно-исследовательского характера по одному из объектов Любечского гидроузла. Целью исследований являлась сравнительная оценка устойчивости крайней секции плотины на нескальном основании при разных конструктивных решениях. Исследовалось также влияние прочностных характеристик грунта земляной плотины, примыкающей к крайней секции, на сопротивление последней против сдвига с поворотом.

В разделе 5.4 рассмотрена задача взаимодействия водобойной плиты крепления в нижнем бьефе с нескальным основанием при гидродинамическом воздействии потока воды, сбрасываемой с верхнего бьефа плотины (расчетная схема плиты соответствуют одному из объектов Волжского гидроузла). По результатам соответствующих расчетов назначается оптимальная толщина плиты водобоя, а также ее армирование. Решение динамической односторонней контактной задачи осуществлялось с помощью алгоритма, изложенного в третьей главе диссертации. Целью расчетов являлась оценка влияния пульсационной составляющей давления воды в сбрасываемом потоке на контактное взаимодействие водобойной плиты с основанием.

При расчете учитывались нагрузки, обусловленные собственным весом плиты, гидродинамическим воздействием со стороны потока воды, фильтрационным противодавлением. Пульсационная составляющая давления воды в сбрасываемом потоке учитывалась в виде динамической импульсной нагрузки. Получены зависимости для предельных значений толщины плиты крепления при различном положении наибольших значений пульсационного давления относительно водобойной плиты, а также при разных направлениях и продолжительности импульса.

В заключении изложены основные результаты диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработана рамно-стержневая модель одностороннего контактно-го взаимодействия упругих систем с использованием контактных конечных элементов (ККЭ) в виде плоской или пространственной рамы. Граничные условия на контакте при этом выражаются через усилия и деформации в стержнях контактных конечных элементах. Предложенная модель позволяет рассматривать различные условия контакта, включая учет кулоновского трения, а также физических свойств односторонних связей (упругую податливость, начальную прочность, нелинейные деформации). Построен ряд рамно-стержневых контактных элементов, совместимых с обычными конечными элементами двумерных, либо трехмерных задач.

2. На базе предложенной дискретной модели составлены численные алгоритмы решения односторонних контактных задач, построение решения которых производится посредством пошагового анализа процесса нагружения и изменения состояния контакта рассматриваемой системы. Последовательность действий состоит из пробных и основных шагов нагружения. Шаги нагружения назначаются как из анализа пробного шага, так и из анализа характера изменения рабочей схемы в результате выполнения основного шага. Данный подход, по сравнению с известными пошаговыми алгоритмами, позволяет уточнять величину не только текущего шага, но и прогнозировать дальнейшие шаги и, таким образом, строить оптимальный, с точки зрения продолжительности и трудоемкости, процесс нагружения.

3. Разработаны эффективные схемы учета трения для случая, когда нормальные силы взаимодействия на контакте не заданы, а изменяются в процессе нагружения. При этом в пределах основного шага (т.е. текущей рабочей схемы) в пошаговом анализе используется линейная аппроксимация для предельных сил трения на контакте, что дает возможность применения более крупных, чем в обычном пошаговом процессе, шагов нагружения.

4. На основе разработанных моделей и расчетных схем построен и реализован алгоритм решения динамических задач с односторонними связями и кулоновским трением на контакте. Решение конструктивно нелинейной динамической задачи при этом сводится к решению последо-

вательности линейных динамических задач на основе пошагового (по времени) анализа состояния контакта. В пределах каждого временного шага используется неявная конечно-разностная схема Ньюмарка и соответствующие аппроксимирующие выражения для перемещений, скоростей и ускорений.

5. Разработанные дискретные модели и расчетные схемы распространены на решение задач с односторонними связями при учете различных физических свойств контактного слоя, а именно упругой податливости, начальной прочности, нелинейных деформаций, а также учета последовательного возведения и загрузки сооружения. Проведены численные исследования по оценке влияния в односторонних связях указанных дополнительных факторов.

6. Разработанные методы и алгоритмы реализованы в комплексе вычислительных программ, предназначенных для решения статических и динамических задач контактного взаимодействия. Указанные программы зарегистрированы в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации.

7. С помощью разработанных численных методов и программ выполнены расчеты ряда конструкций и сооружений с односторонними связями при учете соответствующих условий нагружения и эксплуатации. Проведены численные исследования и на их основе сделаны соответствующие предложения, касающиеся конструктивных решений сооружений и действующих на них нагрузок.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В ведущих рецензируемых научных журналах из перечня ВАК:

1. Лукашевич А. А. Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач / А. А. Лукашевич // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 18–23.

2. Лукашевич А. А. Решение контактных упругих задач с трением Кулона при пошаговом нагружении / А. А. Лукашевич // Изв. вузов. Строительство. – 2008. – № 10. – С. 14–21.

3. Лукашевич А. А. Расчет наклонного трубопровода на температурное воздействие с учетом контактного взаимодействия с основанием / В. Н. Бухарцев, А. А. Лукашевич // Гидротехническое строительство. – 2009. – № 1. – С. 38–41.

4. Лукашевич А. А. Решение задачи о взаимодействии неплоской подошвы сооружения с нескальным основанием / В. Н. Бухарцев, А. А. Лукашевич // Гидротехническое строительство. – 2009. – № 3. – С. 35–38.

5. Лукашевич А. А. Решение контактных задач при учете податливости и прочности односторонних связей методом пошагового нагружения / А. А. Лукашевич // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 3 (20). – С. 18–23.

6. Лукашевич А. А. Численное решение динамических односторонних контактных задач методом пошагового моделирования / А. А. Лукашевич // Изв. вузов. Строительство. – 2010. – № 1. – С. 3–10.

7. Лукашевич А. А. Решение задачи о взаимодействии водобойной плиты крепления с основанием при пульсации давления в сбрасываемом потоке / В. Н. Бухарцев, А. А. Лукашевич // Гидротехническое строительство. – 2010. – № 4. – С. 52–55.

8. Лукашевич А. А. Решение динамических контактных задач с трением методом пошагового анализа / А. А. Лукашевич // Вестник гражданских инженеров. – 2010. – № 3 (24). – С. 71–76.

9. Лукашевич А. А. Решение задач с односторонними связями и трением Кулона при динамических воздействиях / А. А. Лукашевич // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 1. – С. 66–73.

В других научных журналах и трудах конференций:

10. Лукашевич А. А. Моделирование контактного взаимодействия и разрушения упруго-деформируемых твердых тел при действии жесткого индентора / А. А. Лукашевич // Вестник ТОГУ. – Хабаровск. – 2007. – № 1 (4). – С. 69–82.

11. Лукашевич А. А. Пошаговый алгоритм решения контактной задачи с идеальными односторонними связями / А. А. Лукашевич // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб. – 2008. – № 4 (63). – С. 233–237.

12. Лукашевич А. А. Использование пошагового моделирования при решении задач с односторонними связями и трением Кулона / А. А. Лукашевич // Вестник ТОГУ. – Хабаровск. – 2008. – № 4 (11). – С. 127–138.
13. Лукашевич А. А. Учет прочности в односторонних связях методом пошагового нагружения / А. А. Лукашевич // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб. – 2009. – № 1 (74). – С. 60–65.
14. Лукашевич А. А. Решение задач с односторонними связями при динамических воздействиях / Л. А. Розин, А. А. Лукашевич // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб. – 2009. – № 3 (84). – С. 195–199.
15. Лукашевич А. А. Расчет сооружений с учетом последовательного возведения и наличия односторонних связей на контактах / В. Н. Бухарцев, А. А. Лукашевич // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб. – 2009. – № 4-1 (89). – С. 74–78.
16. Лукашевич А. А. Численное решение контактных задач с трением при динамических воздействиях / Л. А. Розин, А. А. Лукашевич // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб. – 2010. – № 4 (110). – С. 288–294.
17. Лукашевич А. А. Решение задач контактного взаимодействия и разрушения упруго-деформируемых твердых тел / А. А. Лукашевич // Новые идеи нового века 2007: материалы восьмой международной научной конференции ИАС ТОГУ. – Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2007. – С. 101–106.
18. Лукашевич А. А. Применение рамных контактных элементов при решении задач с односторонними связями и трением Кулона // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса: материалы региональной научно-практической конференции. – Хабаровск: Изд-во ХГТУ, 2007. – Выпуск 9. – С. 145–151.
19. Лукашевич А. А. Численное решение задач контактного взаимодействия с учетом изменяющихся предельных сил трения // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса: материалы региональной научно-практической конференции. – Хабаровск: Изд-во ХГТУ, 2007. – Выпуск 9. – С. 152–156.
20. Лукашевич А. А. Использование пошагового моделирования при решении контактных задач с учетом трения Кулона / А. А. Лукашевич // Состояние современной строительной науки – 2008. Сб. науч. трудов. – Полтава. – 2008. – С. 7–10.

21. Лукашевич А. А. Решение задач с односторонними связями и трением Кулона пошаговым методом / А. А. Лукашевич // Новые идеи нового века 2008: материалы восьмой международной научной конференции ИАС ТОГУ. – Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2008. – С. 107–115.

22. Лукашевич А. А. Решение задач с учетом трения Кулона пошаговым методом / А. А. Лукашевич // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. Труды Междунар. конф. – СПб. – 2008. – С. 204–206.

23. Лукашевич А. А. Численное решение задач с односторонними связями и трением Кулона пошаговыми методами / А. А. Лукашевич // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Труды XXIII Междунар. конф. – СПб. – 2009. – Т. 2. – С. 254–259.

24. Лукашевич А. А. Расчет устойчивости крайней секции плотины на нескальном основании против сдвига с поворотом / В. Н. Бухарцев, А. А. Лукашевич // Кафедра СКМ. 75 лет на факультете. Сборник материалов научно-технического семинара. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – С. 51–57.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

25. Лукашевич А. А. Программно-вычислительный комплекс для решения задач механики деформируемого твердого тела / А. А. Лукашевич. – Программа для ЭВМ. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ № 2005610090, 2005.

26. Лукашевич А. А. Программа решения двумерных задач контактного взаимодействия и разрушения сплошных сред методом конечных элементов / А. А. Лукашевич. – Программа для ЭВМ. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ № 2005610573, 2007.

27. Лукашевич А. А. Решение двумерных задач контактного взаимодействия с учетом односторонних связей и трения Кулона методом конечных элементов / А. А. Лукашевич. – Программа для ЭВМ. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ № 2008610113, 2008.

Лукашевич Анатолий Анатольевич

**РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ
СВЯЗЯМИ МЕТОДОМ ПОШАГОВОГО АНАЛИЗА**

АВТОРЕФЕРАТ

Изд. лиц. № 021253 от 31.10.97 .

Подписано в печать 09.2011. Формат 60×84 1/16
Бумага офсет. Гарнитура Таймс. Усл.-печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,65.
Тираж 120 экз. Заказ №
Изд-во ГОУ ВПО «ТГАСУ», 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинала-макета автора в ООП ГОУ ВПО «ТГАСУ».
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.